UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2008-2**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **19/12/2008**
DACIBAHCC **Duración 1h 50m**

EXAMEN FINAL DE CALCULO NUMERICO (MB535)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

Problema 1

Considere los puntos de la función f(x) tabulados:

x	-1	0	1	2
f(x)	-5	-1.5	-1	5.5

a) Determine la matriz de Vandermonde V, y escriba la ecuación matricial que le permita obtener el polinomio interpolante.
b) Sabiendo que:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/2 & -1/2 & 1/6 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & -1/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine el polinomio interpolante resolviendo la ecuación matricial escrito en (a)

c) Calcule el valor aproximado de la función en el punto 1.5
d) Escribir un script que resuelva la ecuación matricial.

Solución

a)

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Vp = y$$

b)

$$p = V^{-1}y = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -3/2 \\ 1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

$$P(x)=\frac{3}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$$

c)

P(1.5)=0.9375

d)

x=(-1:2)’

y=[-5   -1.5   -1   5.5]

V=vander(x)

P=inv(V)*y

Problema 2

Consideremos la función de Bessel definida por la integral:

$$J_1(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\alpha\, sen(t)-1)\,dt=\frac{836}{1063}$$

a) Usando $\alpha=2$, determine usando el método de cuadratura Gaussiana con 05 puntos.
b) ¿Qué grado de polinomio ajustaría exactamente la cuadratura Gaussiana con 05 puntos?. Justifique.
c) Si aplicamos Simpson 3/8 con n=6 intervalos, ¿Cuántos decimales exactos conseguiría?

Solución

I =   0.7865 (valor exacto)

Aplicando Gauss-Legendre con 5 puntos.

Q5=0.7873

Grado=9 . Debido a que la cuadratura de Gauss-Legendre ha sido creada en base a 2n incognitas, por lo que el grado es 2n-1 (n=5).

Is38=pi/6*3/8*(y(1)+3*y(2)+3*y(3)+2*y(4)+3*y(5)+3*y(6)+y(7))

Is38 =   0.78900253208362

Al menos una cifra decimal exacta con redondeo y 02 cifras decimales exactas por truncación.

Problema 3

Considerando el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dy_1}{dx} = -0.5 \cdot y_1 \qquad\qquad \frac{dy_2}{dx} = 4 - 0.3 \cdot y_2 - 0.1 \cdot y_1$$

Usando Euler progresivo, resolver en el intervalo entre x = 0 y x = 2, con condiciones iniciales en x = 0, $y_1 = 4$, $y_2 = 6$, utilizando un paso $h = 0.5$.

Solución

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1\ (0, 4, 6) = -0.5 \cdot 4 = -2$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2\ (0, 4, 6) = 4 - 0.3 \cdot 6 - 0.1 \cdot 4 = 1.8$$

primer paso

$$y_1(0.5) = y_1(0) + f_1\ (0, 4, 6) \cdot h = 4 + (-2) \cdot 0.5 = 3$$

$$y_2(0.5) = y_2(0) + f_2\ (0, 4, 6) \cdot h = 6 + (1.8) \cdot 0.5 = 6.9$$

Luego los siguientes pasos son:

x	y_1	y_2
0.0	4.000000	6.000000
0.5	3.000000	6.900000
1.0	2.250000	7.715000
1.5	1.687500	8.445250
2.0	1.265625	9.094870

Problema 4

Sea la ecuación diferencial ordinaria con condiciones en la frontera:

$$y'' + 2xy' - 3y = 0$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(1) = 3$$

Haga una variación del método del disparo, resolviendo los problemas de valor inicial con $S_0 = y'(0) = 0$ y $S_1 = y'(0) = 1$. Utilice Euler con h=0.25 para los cálculos intermedios.

Sugerencia:- obtenga una pendiente mejorada S_2 por interpolación lineal.

Solución

Resolviendo los problemas de valor inicial:

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= 3y - 2xz \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= S_0 = 0 \end{aligned}$$

x	**y**	**z**
0	1.0000	0
0.2500	1.0000	0.7500
0.5000	1.1875	1.4063
0.7500	1.5391	1.9453
1.0000	2.0254	2.3701

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= 3y - 2xz \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= S_1 = 1 \end{aligned}$$

x	**y**	**z**
0	1.0000	1.0000
0.2500	1.2500	1.7500
0.5000	1.6875	2.4688
0.7500	2.3047	3.1172
1.0000	3.0840	3.6768

Realizando una interpolación lineal:

S_0=0	S_1=1	S_2??
Y'(1)=2.3701	Y'(1)=3.6768	Y'(1)=3

S_2=0.4821

Finalmente, resolvemos el siguiente problema de valor inicial:

$$y' = z$$
$$z' = 3y - 2xz$$
$$y(0) = 1$$
$$z(0) = S_2 = 0.4821$$

x	**y**	**z**
0	1.0000	0.4821
0.2500	1.1205	1.2321
0.5000	1.4286	1.9185
0.7500	1.9082	2.5103
1.0000	2.5357	3.0000